ВЫХОДИТ РАЗ В ДВЕ НЕДЕЛИ

Рекомендуемая розничная цена: 279 руб.
Розничная цена: 49,90 грн, 39 900 бел. руб., 990 тенге

Занимательные ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

56

Гордиево окно

ISSN 2225-1782
00056
9 772225 178772

DeAGOSTINI

«ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ГОЛОВОЛОМКИ»
Издание выходит раз в две недели
Выпуск № 56, 2014
РОССИЯ

ИЗДАТЕЛЬ, УЧРЕДИТЕЛЬ, РЕДАКЦИЯ:
ООО «Де Агостини», Россия
ЮРИДИЧЕСКИЙ АДРЕС: 105 066, г. Москва,
ул. Александра Лукьянова, д.3, стр.1
Письма читателей по данному адресу не принимаются.
ГЕНЕРАЛЬНЫЙ ДИРЕКТОР: Николаос Скилакис
ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: Анастасия Жаркова
ВЫПУСКАЮЩИЙ РЕДАКТОР: Варвара Степановская
ФИНАНСОВЫЙ ДИРЕКТОР: Наталия Василенко
КОММЕРЧЕСКИЙ ДИРЕКТОР: Александр Якутов
МЕНЕДЖЕР ПО МАРКЕТИНГУ: Михаил Ткачук
МЛАДШИЙ МЕНЕДЖЕР ПО ПРОДУКТУ: Любовь Мартынова

Уважаемые читатели! Для вашего удобства рекомендуем приобретать выпуски в одном и том же киоске и заранее сообщать продавцу о вашем желании покупать следующие выпуски коллекции.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор) ПИ № ФС77-43310 от 28.12.2010 г.

Для заказа пропущенных номеров
и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт
www.deagostini.ru
По остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной «горячей линии» в России:
8-800-200-02-01
Телефон «горячей линии» для читателей Москвы:
8-495-660-02-02
АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ:
Россия, 600001 г. Владимир, а/я 30, «Де Агостини», «Занимательные головоломки»
РАСПРОСТРАНЕНИЕ:
ООО «Бурда Дистрибьюшен Сервисиз»

УКРАИНА
ИЗДАТЕЛЬ И УЧРЕДИТЕЛЬ:
ООО «Де Агостини Паблишинг», Украина
ЮРИДИЧЕСКИЙ АДРЕС: 01032, Украина, г. Киев, ул. Саксаганского, д. 119
ГЕНЕРАЛЬНЫЙ ДИРЕКТОР: Екатерина Клименко
Свидетельство о государственной регистрации печатного СМИ Министерства юстиции Украины КВ № 17502-6252Р от 01.03.2011
АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ:
Украина, 01033, г. Киев, а/я "Де Агостини", «Занимательные головоломки»
Україна, 01033, м. Київ, а/с «Де Агостіні»
Для заказа пропущенных номеров
и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт
www.deagostini.ua
По остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной «горячей линии» в Украине:
0-800-500-8-40

БЕЛАРУСЬ
ИМПОРТЕР И ДИСТРИБЬЮТОР В РБ: ООО «Росчерк», 220037, г. Минск, ул. Авангардная, д. 48а, литер 8/к, тел./факс: (+375 17) 331-94-41, (+375 29) 673-55-55, (+375 33) 637-20-29
Телефон «горячей линии» в Беларуси:
+375 17 279-87-87 (пн-пт, 9.00 — 21.00)
АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ: Республика Беларусь, 220040, г. Минск, а/я 224, ООО «Росчерк», "Де Агостини", «Занимательные головоломки»

КАЗАХСТАН
РАСПРОСТРАНЕНИЕ: ТОО «КГП «Бурда-Алатау-Пресс»
РЕКОМЕНДУЕМАЯ РОЗНИЧНАЯ ЦЕНА: 279 руб.
РОЗНИЧНАЯ ЦЕНА: 49,90 грн, 39 900 бел. руб., 990 тенге
ОТПЕЧАТАНО В ТИПОГРАФИИ: ООО «Компания Юнивест Маркетинг», 08500, Украина, Киевская область, г. Фастов, ул. Полиграфическая, 10
ТИРАЖ: 50 000 экз.
Издатель оставляет за собой право изменять последовательность номеров и их содержание.
Издатель оставляет за собой право увеличить рекомендуемую цену выпусков.
Неотъемлемой частью каждого выпуска является приложение.

ISSN 2225-1782
ДАТА ВЫХОДА В РОССИИ: 26.03.2014

занимательные ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

В этом выпуске:

Математическая вселенная

Морфизмы сыграли важнейшую роль в развитии математики. Объяснить, что такое морфизм, можно на примере дословного перевода с одного языка на другой. Мы можем установить подробное соответствие между всеми словами обоих языков, однако это не поможет при переводе текста, ведь мы не приняли во внимание лингвистические структуры, составляющие основу обоих языков. Учет лингвистических структур равносилен установлению морфизма между рассматриваемыми языками.

Блистательные умы

Эли и Анри Картан — один из немногих примеров в истории, когда и отец, и сын стали математиками первой величины. Открытия Эли Картана в ассоциативной линейной алгебре имели большое значение, так как позволили объединить столь разные разделы математики, как теория непрерывных групп, алгебра Ли, дифференциальные уравнения и геометрия. Одной из особенностей, которыми славился Анри Картан, была способность публиковать статьи, которые удивляли всех. Содержание одной из них было столь недоступным для понимания, что математики в шутку назвали ее диплодоком.

Математика на каждый день

Алгоритм, который изменил интернет В 1998 году два студента Стэнфордского университета Лоуренс Пейдж и Сергей Брин закончили работу над первым вариантом простого и элегантного алгоритма PageRank, позволявшего выстраивать иерархию страниц произвольного списка в зависимости от их релевантности. PageRank был положен в основу поисковой системы, которая через несколько лет стала преобладающим средством поиска в интернете для миллионов пользователей. Эта поисковая система называлась Google.

Математические задачки

Разные вопросы Сегодняшние задачки от английского головоломщика Генри Э. Дьюдени объединяет то, что они... никак не связаны между собой. «Кто был первым?», «Головоломка с календарем», «Трудолюбивый книжный червь»... Начнем, пожалуй!

Головоломки

Гордиево окно Эта головоломка известна также под английским названием window pain. Новая версия головоломки о гордиевом узле состоит из двух соединенных между собой элементов, которые нужно разделить. Это веревка, на которую нанизан шарик, и «окна» очень интересной формы. Цель головоломки — освободить веревку с нанизанным на нее шариком, продев ее через все отверстия в «окне».

Морфизмы сыграли важнейшую роль в развитии математики. Они особенно важны при работе с алгебраическими структурами, так как являются основным элементом любой классификации.

Алгебраические структуры

Морфизмы

◄ *Простое отображение можно установить между товарами, выложенными на прилавке, и соответствующими ценами. Если предположить, что цены всех товаров различаются, то установленное нами отображение будет называться взаимно однозначным, или биекцией.*

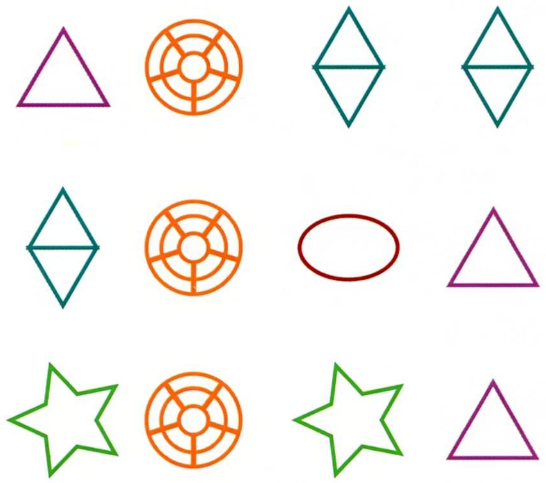
Объяснить, что такое морфизм, можно на примере дословного перевода с одного языка на другой (эта аналогия будет не совсем точной, однако позволит получить общее представление о морфизме). Мы можем установить подробное соответствие между всеми словами обоих языков, однако это не поможет при переводе текста, ведь мы не приняли во внимание лингвистические структуры, составляющие основу обоих языков. Учет лингвистических структур равносилен установлению морфизма между рассматриваемыми языками.

▼ *В фильме «Контакт» сбывается мечта главной героини Элли: она получает сообщение с далекой звезды Вега. Чтобы Элли смогла понять сообщения инопланетян, ей нужно установить соответствие между нашими буквами и цифрами и буквами и цифрами сообщения, то есть определить биекцию.*

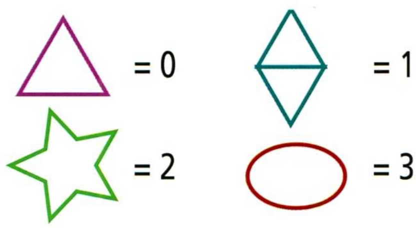
Сообщение Цифрона

Рассмотрим в качестве примера научно-фантастическую историю. В году «две тысячи икс» группе экспертов, занимающихся прослушиванием сигналов из космоса, удалось вступить в контакт с внеземной цивилизацией, которая отправляет сообщения из какого-то далекого уголка Вселенной.

Группа экспертов не хочет сразу сообщать об этой новости журналистам. Эксперты сначала хотят немного изучить культуру этой инопланетной цивилизации, которую они назвали Цифрон. Эксперты получили множество сообщений, в которых содержатся геометрические фигуры



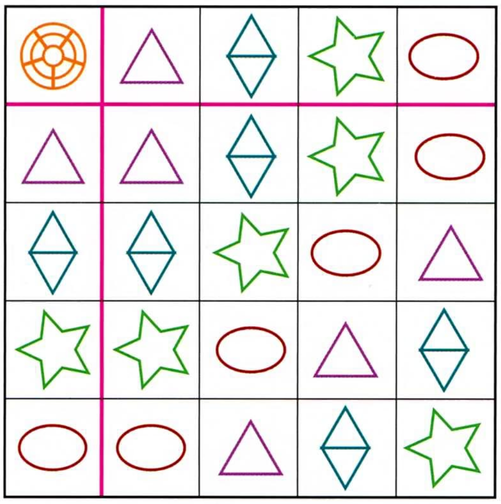
и символы. Поразмышляв несколько дней, эксперты пришли к выводу: в сообщениях содержатся числа. Это неудивительно: если инопланетная цивилизация хочет отправить сигнал другим мирам, логичнее всего будет сообщение, содержащее математические символы, простейшими из которых являются числа. Кроме того, ученым удалось установить прямое соответствие между земными цифрами и символами Цифрона:



Таким образом, эксперты определили так называемое взаимно однозначное соответствие между символами Цифрона и нашими числами.

Так как символу, изображенному внизу, не соответствует никакое число, ученые предположили, что он, возможно, обозначает определенные отношения между другими символами.

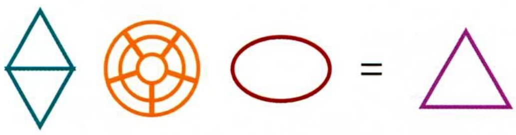
Проще всего будет предположить, что речь идет о некоторой математической операции, и построить следующую таблицу на основе имеющихся данных.



Это аналогично

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	6

Однако если мы рассмотрим, например, операцию



то увидим, что она совершенно не похожа на операцию сложения $1 + 3 = 4$.

Тогда ученые предположили, что речь идет не о сумме, а о произведении, однако эта гипотеза также с треском провалилась: к примеру, равенство $3 \cdot 2 = 6$ также не соответствует таблице. Тогда эксперты решили обратиться к специалисту-математику. Когда математик увидел таблицу, он сказал: «Вы определили взаимно однозначное отображение, которое не является морфизмом. Иными словами, в этом отображении не сохраняются сумма и произведение». Как же решить эту задачу?

Обитатели Цифрона отправили нам таблицу сложения для множества, которое мы называем кольцом вычетов по модулю 4. Это множество обычно обозначается Z_4. Определить это множество целых чисел очень просто: оно содержит всего 4 элемента, которые мы можем обозначить $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$ и $\overline{3}$. Любое целое число можно свести к одному из этих четырех, для этого достаточно разделить исходное число на 4 и взять остаток от деления. К примеру, число 7 будет относиться к классу $\overline{3}$, так как $7 : 4 = 1 + 3 : 4$. Приведем еще несколько примеров:

$$0 = \overline{0};\ 1 = \overline{1};\ 2 = \overline{2};\ 3 = \overline{3};\ 4 = \overline{0};\ 38 = \overline{2};\ 249 = \overline{1}.$$

Теперь, когда мы установили «правила игры», определить сумму над кольцами вычетов очень просто: она будет выполняться по тем же правилам, что и обычная сумма. Единственное, что потребуется определить особо, — это алгоритм действий для случая, когда результат сложения больше 3. Пример:

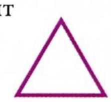
$$\overline{1} + \overline{2} = \overline{3}$$
$$\overline{3} + \overline{1} = \overline{0}$$
$$\overline{3} + \overline{3} = \overline{2}$$

На основе этих равенств можно построить таблицу сложения для множества Z_4.

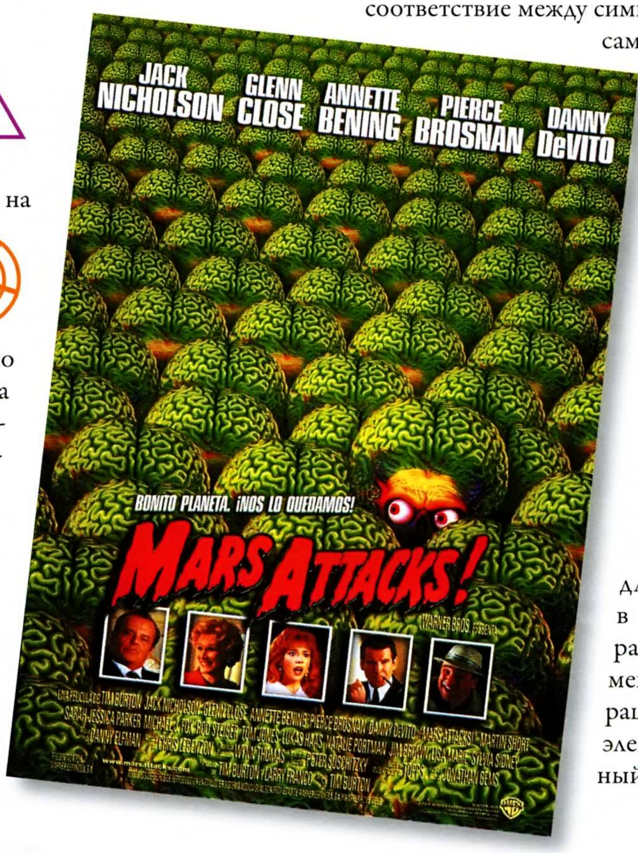
+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

Теперь можно убедиться, что установленное соответствие между символами Цифрона и классами вычетов по модулю 4 является изоморфизмом, так как сохраняет структуру обоих множеств.

Наш специалист-математик пришел к этому выводу, всего лишь взглянув на таблицу символов Цифрона. Он сразу же увидел нейтральный элемент



Далее он увидел, что для каждого элемента в таблице существует обратный, то есть такой элемент, что результатом операции над ним и исходным элементом будет нейтральный элемент. Кроме того,



▼ *Марсиане, изображенные в фильме «Марс атакует!», снятом режиссером Тимом Бертоном в 1996 году, в отличие от жителей Цифрона, не представляют собой пример высокоинтеллектуальной инопланетной культуры.*

таблица симметрична относительно главной диагонали. На основе всех этих данных математик сделал вывод: речь идет о конкретной алгебраической структуре, которая называется группой. Рассматриваемая группа является коммутативной, так как таблица симметрична относительно главной диагонали.

▲ *Тень, отбрасываемая человеком на стену при ходьбе, с точки зрения математики представляет собой морфизм векторного трехмерного пространства (мира, в котором мы живем) на двухмерное векторное пространство (плоскую поверхность стены, на которую падает тень).*

«С точностью до изоморфизма»

В современных книгах по математике это выражение — одно из наиболее часто используемых. Чаще всего его можно увидеть в контексте высказываний и теорем, описывающих определенное сильное свойство, в особенности теорем, касающихся некоторых критериев классификации.

Во-первых, следует учесть, что изоморфизм можно понимать если не как тождество, то как равенство в том смысле, в котором равны две таблицы из предыдущего примера. В самом деле, кольца вычетов и символы азбуки Цифрона равнозначны: одну и ту же таблицу можно записать, заменив указанные символы, к примеру, на грушу, автомобиль, Луну и кредитную карту. Здесь важна структура, определенная между этими элементами. В нашем случае эта структура проявляется в том, как мы заполняем ячейки таблицы исходными символами. Алгебраическая структура в этом случае будет коммутативной группой.

В соответствии с этим критерием две изоморфные алгебраические структуры в целях классификации можно считать равными, так как они ведут себя аналогичным образом и равны «с точностью до изоморфизма».

Классификация морфизмов

После того как мы определили общие понятия, следует уточнить некоторые термины, которым мы не дали строгого математического определения. Во-первых, напомним, что отображение множества A на множество B определяется как соответствие, при котором для каждого элемента A существует одно и только одно его отображение на множестве B. Отображения обычно обозначаются строчными буквами, например f. Таким образом, f: A→B — это отображение множества A на B, а b — отображение a, если $f(a) = b$.

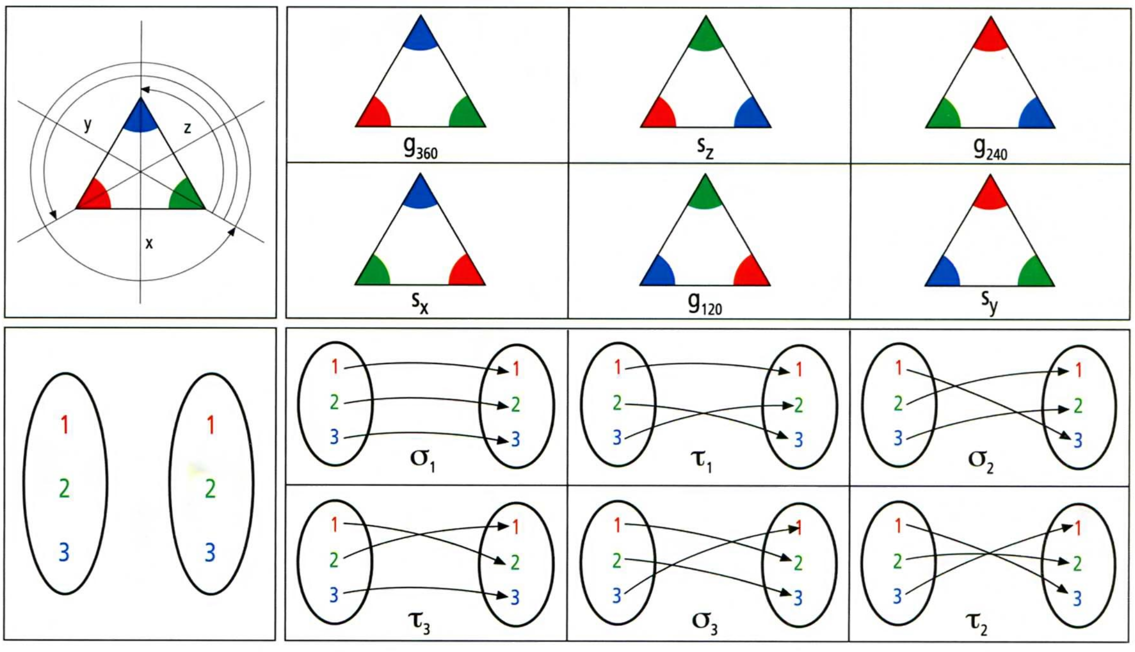
Существует три типа отображений, которые имеют особые названия.

— Инъективное отображение — любое отображение, при котором все элементы B имеют не более одного прообраза на множестве A.

— Сюръективное отображение — это отображение, при котором все элементы B имеют как минимум один прообраз на множестве A.

— Биективное отображение — это отображение, которое является инъективным и сюръективным одновременно.

Если на множествах A и B определены некоторые операции, то можно вести речь о морфизмах.



► *Вверху — множество шести движений (поворотов и симметрий) равностороннего треугольника, образующее группу. Внизу — шесть биекций (или перестановок) симметричной группы, которые также образуют группу. Соответствие между движениями треугольника и перестановками симметричной группы является морфизмом между этими двумя группами.*

Допустим, что на множестве A определена внутренняя операция, которую мы обозначим ^, на множестве B — другая операция, которую мы обозначим *. Отображение f для обоих множеств

$$f: (A,\wedge) \to (B,*)$$

будет морфизмом, если будет выполняться условие

$$f(a \wedge b) = f(a) * f(b).$$

Рассмотрим несколько примеров. Допустим, что отображение задано на множестве целых чисел, на котором определена операция сложения, и что отображение f заключается в умножении на 2. Иными словами, $f(x) = 2x$. В этом случае имеем отображение

$$(Z, +) \to Z\ (, +)$$
$$2 \to 4;\ 3 \to 6 \text{ и т. д.}$$

Чтобы оно было морфизмом, должно выполняться условие $f(2 + 3) = f(2) + f(3)$.

Это условие выполняется, так как

$$f(2+3) = f(5) = 2 \cdot 5 = 10,$$
$$f(2) + f(3) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 4 + 6 = 10.$$

Несложно доказать, что это условие, верное для частного случая, выполняется и в общем случае:

$$f(a+b) = 2 \cdot (a+b) = 2 \cdot a + 2 \cdot b = f(a) + f(b).$$

Теперь посмотрим, что произойдет с отображением g, которое мы определили следующим образом: $g(a) = a + 1$.

В этом случае имеем:

$$g(2+3) = g(5) = 5 + 1 = 6,$$
$$g(2) + g(3) = (2+1) + (3+1) = 3 + 4 = 7.$$

Таким образом, $g(2 + 3) \neq g(2) + g(3)$, и это отображение не является морфизмом.

Деление отображений на инъективные, сюръективные и биективные распространяется и на морфизмы, которые имеют отдельные названия в зависимости от того, на основе какого отображения они определены. Так, говорят о следующих видах морфизмов:

Мономорфизм — исходное отображение, для которого определен морфизм, является инъективным.

Эпиморфизм — исходное отображение, для которого определен морфизм, является сюръективным.

Изоморфизм — исходное отображение, для которого определен морфизм, является биективным.

Если изоморфизм отображает исходное множество на само себя, он называется автоморфизмом.

В самом общем случае, когда отображение не принадлежит к одному из трех указанных типов, морфизм называется гомоморфизмом. По правде говоря, этот термин был выбран не слишком удачно, так как помимо гомоморфизма (самого общего случая морфизма) существует еще один очень похожий термин — гомеоморфизм, который имеет совершенно иное значение. Гомеоморфизм — это биективное отображение между точками двух геометрических фигур (двух топологических пространств), непрерывное в обоих направлениях.

▲ *Между двенадцатью первыми числами (Z_{12}) и множеством целых чисел (Z) существует морфизм, благодаря чему мы можем отсчитывать время с помощью натуральных чисел, даже несмотря на то, что последовательность часов (от 0 до 11) не совпадает с бесконечной последовательностью натуральных чисел (0, 1, 2, 3, ...).*

Логические операции

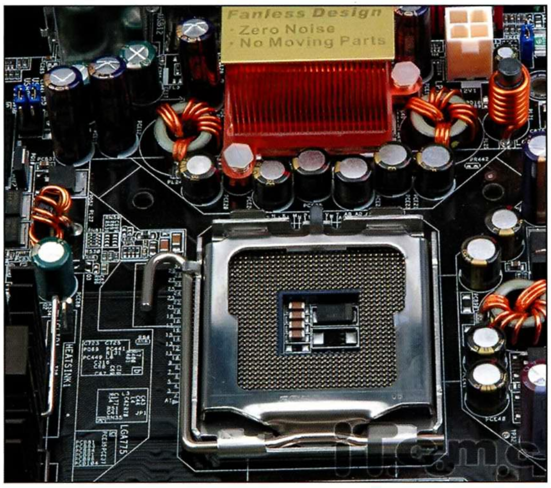
Морфизмы имеют особое практическое значение, если речь идет о логических операторах — разновидности функций, которые являются важнейшей составной частью информатики, в особенности проектирования так называемых логических элементов.

Логическая операция — это операция, определенная на множестве логических переменных или функций истинности. Говоря простым языком, логические операции определены на множестве из двух элементов, которые мы будем обозначать И и Л — истина и ложь соответственно. Простой операцией, к примеру, является операция «или», которую обычно обозначают знаком ∨. Таблица истинности для этой операции выглядит следующим образом:

a	*b*	*a*∨*b*
истина	истина	истина
истина	ложь	истина
ложь	истина	истина
ложь	ложь	ложь

► *Повсеместное присутствие компьютеров во всех областях жизни, а также неостановимое распространение цифровой информации стало возможным благодаря существованию морфизмов над логическими операциями, которые играют важнейшую роль при проектировании и использовании так называемых логических элементов.*

Эта таблица в некотором роде описывает наше интуитивное представление о логической операции «или», то есть дизъюнкции, для двух конкретных высказываний. «Ложь или ложь есть ложь», «истина или истина есть истина» и так далее. Эту же таблицу можно построить для



◄ *Благодаря растущим мощностям электронных устройств, основанных на двоичной логике, в частности процессоров, устанавливаемых на материнские платы персональных компьютеров (на иллюстрации), они стали важнейшим элементом человеческого прогресса.*

операции (∨), определенной на множестве А, содержащем всего два элемента А = {И, Л}.

∨	И	Л
И	И	И
Л	И	Л

Теперь рассмотрим множество В = {0, 1}, состоящее из «битов» 0 и 1, которые можно рассматривать как числа в двоичной системе счисления, и составим таблицу умножения.

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Определим отображение f: (А, ∨) → (В, ·):

$$f(\text{И}) = 0; f(\text{Л}) = 1.$$

Очевидно, что это отображение является взаимно однозначным, то есть биективным. Кроме того, выполняются следующие равенства:

$$f(\text{И}\vee\text{И}) = f(\text{И}) = 0 = f(\text{И})\cdot f(\text{И}) = 0\cdot 0,$$
$$f(\text{И}\vee\text{Л}) = f(\text{И}) = 0 = f(\text{И})\cdot f(\text{Л}) = 0\cdot 1,$$
$$f(\text{Л}\vee\text{И}) = f(\text{И}) = 0 = f(\text{Л})\cdot f(\text{И}) = 1\cdot 0,$$
$$f(\text{Л}\vee\text{Л}) = f(\text{Л}) = 1 = f(\text{Л})\cdot f(\text{Л}) = 1\cdot 1.$$

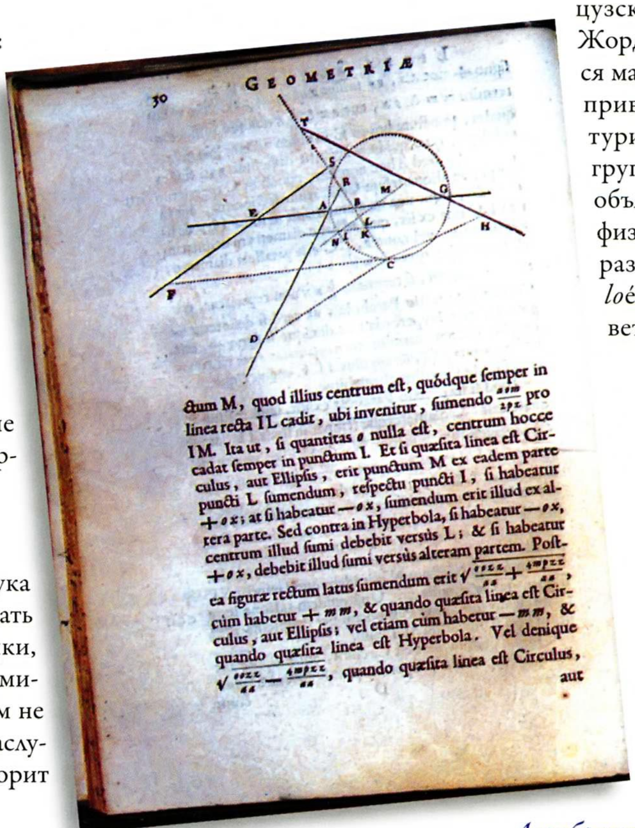
Таким образом, поскольку отображение является биективным, рассматриваемый морфизм является изоморфизмом.

Происхождение морфизмов

Истоки идеи морфизма, которая идет рука об руку с понятием структуры, следует искать в попытках «моделирования» математики, выполненных в разные эпохи с целью формирования «универсальной математики». Тем не менее существует достойный прецедент, заслуживающий упоминания: когда Декарт говорит о подобии и применяет это понятие к отношениям, которые он определил между операциями сложения и умножения чисел, слово «подобие» в его рассуждениях можно заменить словом «изоморфизм». Однако мы знаем, что Декарт намного опередил свое время, а его открытие было предано забвению. Эта идея вновь возродилась лишь в середине XIX века. Различные модели, созданные в разных разделах математики, позволяли переходить от одной структуры к другой посредством соответствующих изменений языка. Классический пример этому содержится в проективной геометрии. В учебниках по этой дисциплине теоремы обычно записываются в два столбца: в первом — исходное утверждение, во втором — двойственное ему, которое также является корректным и получено путем простой замены терминов языка. Тем не менее современные изоморфные структуры были описаны со всей точностью только в современной алгебре: сначала в работах Гаусса на примере абелевых изоморфных групп, затем — в заметках Галуа на примере групп перестановок. Но и эти определения обладали одним недостатком: они были верными в конкретных случаях, а определения в общем виде, применимого к абстрактной структуре, не существовало, так как понятие алгебраической структуры все еще не было определено со всей точностью.

▲ *Французский математик Камиль Жордан (1838–1922), автор важных работ по высшей алгебре, первым определил понятие группы и изоморфизма.*

Книга под названием «Трактат о подстановках и алгебраических уравнениях» (Traité des substitutions et des équations algébriques), опубликованная в 1870 году, автором которой был французский математик Камиль Жордан (1838–1922), считается маленьким шедевром: в ней приведено наиболее структурированное определение группы, а также подробно объясняется понятие изоморфизма. В этой книге Жордан различает *isomorphisme holoédrique*, который соответствует нашему понятию


30 GEOMETRIÆ

ctum M, quod illius centrum eſt, quódque ſemper in
linea recta IL cadit, ubi invenitur, ſumendo $\frac{aom}{2pz}$ pro
IM. Ita ut, ſi quantitas o nulla eſt, centrum hocce
cadat ſemper in punctum I. Et ſi quæſita linea eſt Cir-
culus, aut Ellipſis, erit punctum M ex eadem parte
puncti L ſumendum, reſpectu puncti I, ſi habeatur
+ox; at ſi habeatur —ox, ſumendum erit illud ex al-
tera parte. Sed contra in Hyperbola, ſi habeatur —ox,
centrum illud ſumi debebit versùs L; & ſi habeatur
+ox, debebit illud ſumi versùs alteram partem. Poſt-
ea figuræ rectum latus ſumendum erit $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$,
cùm habetur +mm, & quando quæſita linea eſt Cir-
culus, aut Ellipſis; vel etiam cùm habetur —mm, &
quando quæſita linea eſt Hyperbola. Vel denique
$\sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$, quando quæſita linea eſt Circulus,
aut

◄ *Рене Декарт (1596–1650), страница из произведения которого изображена на иллюстрации, опередил свое время, применив термин «подобие» к отношениям между операциями сложения и умножения в том же смысле, в каком используется современное понятие «изоморфизм».*

изоморфизма, и *isomorphisme mériédrique* — особый вид соответствия, который не удовлетворяет ни одному из приведенных выше определений и задается как соответствие между двумя группами, такое что если в первой группе $a \cdot b = c$, то во второй группе должно выполняться равенство $a' \cdot b' = c'$, если a', b', c' — соответствующие отображения a, b и c.

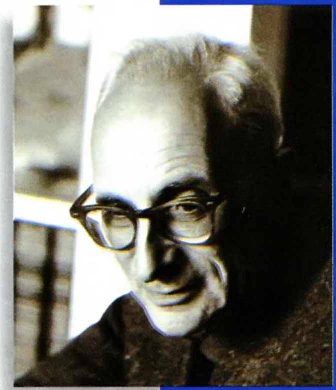
Немецкий математик Эуген Нетто (1848–1919) в своей книге «Теория подстановок и ее применение в алгебре» (Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra), опубликованной в 1882 году, четко объясняет понятия изоморфизма и гомеоморфизма в их современном значении, уточняя, что в случае с изоморфизмом речь идет о биективном отображении между группами.

В этом смысле изоморфизм как математическая сущность — сравнительно новое понятие. Изоморфизмы начали систематически применяться в начале XX века, когда такие алгебраические структуры, как группа, кольцо и поле, были определены со всей строгостью.

▲ *Четкое определение понятий изоморфизма и гомеоморфизма в современном смысле привел в 1882 году немецкий математик Эуген Нетто (1848–1919), внесший важный вклад в теорию групп.*

ЭТО ИНТЕРЕСНО

Понятия структуры и отношения между структурами покинули пределы математики в начале XX века, когда Фердинанд де Соссюр (справа) применил их в лингвистике. Позднее, в 1920-е годы, идеи Соссюра были применены в эстетике и литературной критике членами Пражского лингвистического кружка. Зародившийся структурализм вышел за пределы лингвистики с появлением работ французского антрополога Клода Леви-Стросса (вверху), который предложил проанализировать социальные структуры посредством изучения умственных структур индивидов, их составляющих. С того времени структурализм стал настоящей «философской модой», и его стали применять ко всему, что могло обладать структурой. Целью этих попыток было найти некую связь (математики назвали бы ее морфизмом), которая позволила бы понять сущности путем их сравнения.



Метафизика морфизмов

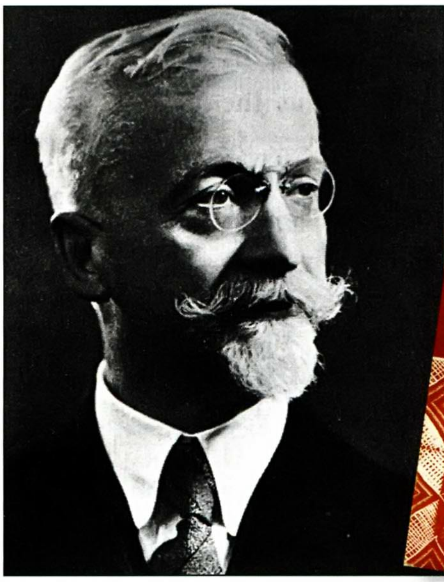
В большинстве случаев философские рассуждения, которые часто вращаются вокруг определенных математических понятий и утверждений, не имеют ни философской, ни математической ценности. Это не означает, что подобные рассуждения не следует рассматривать вовсе: по ходу развития математики и философии между ними установились прочные связи, отражающие взаимное влияние этих наук друг на друга. В случае с морфизмами эта связь проявляется уже в философии Платона, а также у Аристотеля, который категорически утверждает, что важной является форма, структура. Двойственность «дух — материя» проявляется, если мы рассмотрим, к примеру, множество, на котором определена операция, устанавливающая некие отношения между элементами множества. Это множество можно рассматривать как материальное воплощение наших рассуждений. Если на основе этих отношений можно определить некую структуру (например, коммутативную группу, кольцо и т. д.), множество перейдет в «духовную» плоскость. Теперь можно утверждать, что изоморфизм — это соответствие между двумя материальными сущностями, сохраняющее их «дух».

◀ *Хотя между философскими размышлениями и математическими трудами можно провести множество параллелей, размышления философов о математике, как правило, лишены какой-либо ценности. Тем не менее истоки понятия «морфизм» можно найти у Платона (слева) и Аристотеля (справа).*

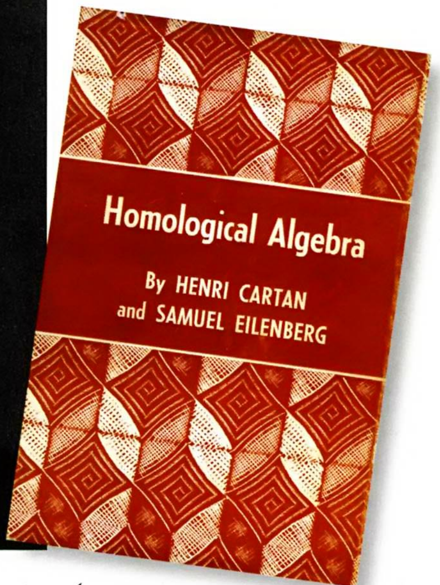
Эли и Анри Картан являют собой один из немногих примеров в истории, когда и отец, и сын стали математиками первой величины. Их работы сыграли огромную роль в некоторых специализированных разделах математики.

Два поколения математиков

Эли и Анри Картан



▲ *В своей работе Notice sur les travaux scientifiques («Заметки о научных трудах») Эли Картан признает, что главной темой почти двухсот его исследовательских работ была теория групп Ли, которую он дополнил понятием алгебраической группы и определил антисимметричные дифференциальные формы в общем виде.*



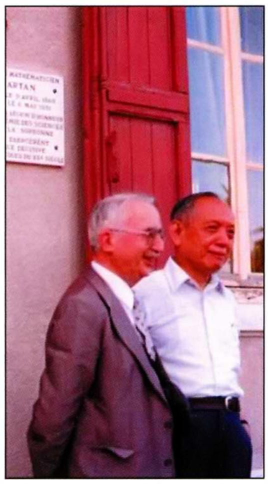
▲ *Одной из особенностей, которыми славился вечно юный Анри Картан (он прожил 104 года), была способность публиковать статьи, которые удивляли всех. Возможно, наиболее примечательной из них стала статья по гомологической алгебре, написанная совместно с польским и американским математиком Самуэлем Эйленбергом, членом группы Бурбаки. Содержание этой знаменитой статьи было столь недоступным для понимания, что математики в шутку назвали ее диплодоком.*

Эли Картан родился 9 апреля 1869 года во французском городе Доломьё близ Шамбери. Семья была небогатой (отец Эли, Жозеф Картан, был деревенским кузнецом), поэтому шансы Эли получить какое-то образование были невелики. Тем не менее благодаря удивительному таланту и счастливому случаю школьный инспектор Антонин Бюбост обнаружил удивительные способности Эли, когда он учился в начальной школе Доломьё. Государство оплатило обучение Эли во Вьенне, а затем в лицеях Гренобля и Жансон-де-Сайи. В 1888 году Эли Картан был принят в парижскую Высшую нормальную школу, которую окончил в 1894 году. Его преподавателями математики были Анри Пуанкаре, Эмиль Пикар и Шарль Эрмит. Так началась его карьера, в которой всё указывало на то, что он станет выдающимся математиком: Картан стал профессором университетов Монпелье (1894–1896), Лиона (1896–1903) и Нанси (1903–1909). В 1909 году он возглавил кафедру дифференциального и интегрального исчисления в Париже, в 1920-м начал преподавать теоретическую механику, а с 1924 по 1940 год работал преподавателем высшей геометрии. В 1940 году Эли Картан вышел в отставку. Он умер в Париже 6 мая 1951 года.

Открытия Эли Картана в ассоциативной линейной алгебре имели большое значение и были совершены в крайне удачный момент, так как позволили объединить столь разные разделы математики, как теорию непрерывных групп, алгебры Ли, дифференциальные уравнения и геометрию. Особо следует отметить открытие теории спиноров в 1913 году. Спинор — это комплексный вектор, который позволяет получить двумерные представления поворотов, выполняемых в трехмерном пространстве. Позднее спиноры нашли крайне важное применение в квантовой механике. (Спинор — это двумерный вектор, составляющими которого являются комплексные числа, позволяющие описать бозоны и фермионы, в то время как с помощью тензоров можно описать исключительно поведение бозонов.)

Эли, отец Анри

В 1903 году Эли Картан женился на Мари-Луизе Бьянкони, и 8 июля следующего года родился Анри Картан, старший из четырех детей. Кажется логичным предположить, что решающее влияние на его судьбу оказал отец, однако это совершенно не так. Эли Картан никоим образом не хотел оказывать влияние ни на Анри, ни на трех младших детей. Единственным внешкольным занятием, которое чета Картан считала обязательным,



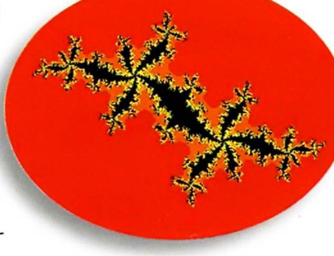
◄ *На фотографии изображены французский математик Анри Картан (сын Эли Картана) и великий китайский геометр Шиинг-Шен Черн (1911–2004) на конференции, посвященной памяти Эли Картана и прошедшей в Лионе (Франция) в 1984 году. Ученые позируют перед мемориальной доской, размещенной на стене текстильного института в память об Эли Картане.*

были занятия музыкой. Таким образом, страсть к математике, которая проявилась в юном Анри уже в раннем возрасте, возникла не под влиянием отца.

Анри Картан также окончил Высшую нормальную школу Парижа, где его преподавателями были отец и Гастон Жюлиа. Там же он подружился с Андре Вейлем, с которым спустя несколько лет провел важные математические исследования. Анри Картан окончил обучение в 1928 году, а спустя два года опубликовал одну из работ, принесших ему международное признание, — «Об аналитических преобразованиях колец», посвященную аналитическим функциям различных комплексных переменных. Эта статья определила основное направление его исследований.

14 сентября 1935 года Анри женился на Николь Антуанетте Вайс, которая родила ему двоих сыновей и трех дочерей. Анри Картан и Андре Вейль вместе работали в Страсбургском университете, где оба преподавали математику. Вейль не раз говорил о необходимости реформ в преподавании математики в университетах и предложил Картану написать трактат по математическому анализу, который можно было бы использовать в новой учебной программе. В конце 1934 года Вейль привлек к работе над проектом еще полдюжины математиков. Так родилась знаменитая группа Бурбаки, оказавшая огромное влияние на математику XX века, группа, которой Картан посвящал большую часть своего времени.

▲ *Хотя Эли Картан не хотел, чтобы дети пошли по его стопам, его сын Анри Картан стал одним из крупнейших математиков XX века.*



◄ *Так называемое множество Жюлиа (на иллюстрации) впервые описал французский математик Гастон Морис Жюлиа (1893–1978), который был преподавателем Анри Картана в Высшей нормальной школе Парижа.*

▼ *На фотографии изображено собрание так называемой группы Бурбаки. Слева направо на фото: Жак Диксмье, Жан Дьёдонне, Пьер Самюэль, Андре Вейль (идейный вдохновитель группы), Жан Дельсарт и Лоран Шварц.*

ЭТО ИНТЕРЕСНО

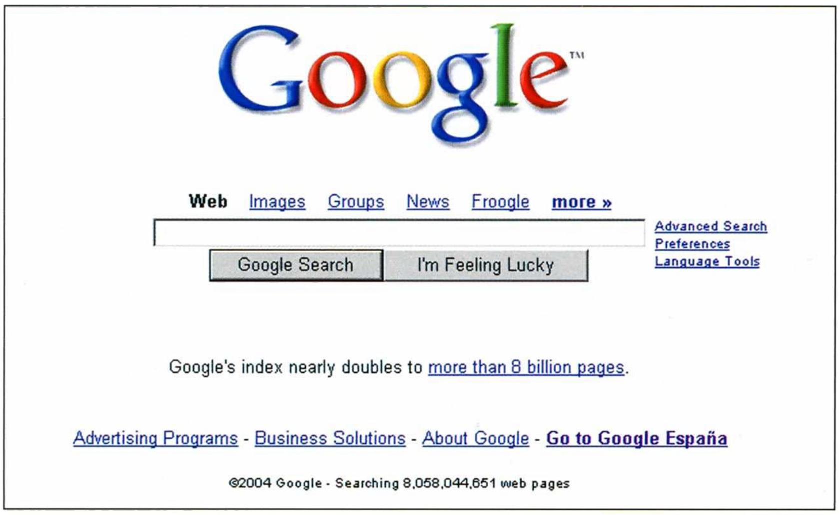
- У Эли Картана было трое сыновей и дочь. Жизни двух младших сыновей, Жана и Луи, оборвались трагически. Жан, который занимался музыкой, рано проявил себя как композитор, но умер от туберкулеза, когда ему было всего 25 лет. Луи, который был физиком, вступил в ряды французского Сопротивления во время немецкой оккупации. Он был арестован и депортирован в Германию в феврале 1943 года. Больше двух лет родные не получали никаких известий о его судьбе. В мае 1945 года им сообщили, что Луи был казнен после 15 месяцев пребывания в концентрационном лагере. Узнав об этом, Эли Картан, которому на тот момент было уже 75 лет, надломился психологически и уже никогда не оправился от потери.

- Анри Картан интересовался всем, что касалось защиты прав человека, и принимал самое активное участие в этом движении. Он сыграл главную роль в Национальном комитете математиков, основной функцией которого была помощь математикам, подвергавшимся преследованию за происхождение или политические взгляды. Одним из самых примечательных поступков Картана стало вмешательство в дело советского математика-диссидента Леонида Плюща, который был насильно помещен в психиатрическую лечебницу. Картан воспользовался моментом и на международном конгрессе математиков, прошедшем в Ванкувере в 1974 году, собрал несколько сотен подписей в защиту Плюща. В январе 1976 года Леонид Плющ был выпущен на свободу.

Найти нужную информацию в интернете — лишь первая задача, которую должна решить поисковая система. Упорядочить результаты так, чтобы первыми отображались самые релевантные страницы, — едва ли не более сложная задача.

PageRank

Алгоритм, который изменил интернет



▲ *Мощная поисковая система Google, главная страница которой изображена на иллюстрации, предлагает пользователю ряд базовых возможностей поиска. В различных версиях Google на разных языках доступны расширенные возможности, которые позволяют уточнить критерии поиска.*

В 1998 году два студента Стэнфордского университета Лоуренс Пейдж и Сергей Брин закончили работу над исследовательским проектом под загадочным названием «Анатомия системы крупномасштабного гипертекстового интернет-поиска». В этом проекте они привели первую формулировку простого и элегантного алгоритма PageRank, позволявшего выстраивать иерархию страниц произвольного списка в зависимости от их релевантности. PageRank стал основой поисковой системы, которая через несколько лет заменила Yahoo, Altavista и многие другие поисковики и стала основным средством поиска в интернете для миллионов пользователей. Эта поисковая система называлась Google.

Проект Пейджа и Брина был основан на следующей предпосылке: важность документа прямо пропорциональна числу его упоминаний в других документах. Эту предпосылку Брин и Пейдж заимствовали в научном мире, где она используется при составлении индексов цитирования. Применительно к интернету этот принцип означает, что самыми релевантными являются страницы, на которые указывает больше всего ссылок. Кроме того, если эти ссылки содержатся на страницах, которые также являются релевантными (иными словами, на них указывают другие ссылки), то документ, на который указывают эти ссылки, будет релевантным с большей вероятностью. После того как для каждой страницы определено значение релевантности, поисковая система отображает полный список результатов, упорядоченных от более релевантных к менее релевантным. В результате пользователю не нужно впустую пролистывать десятки, сотни и даже тысячи страниц, которые не представляют для него почти никакого интереса.

PageRank в высшей степени элегантен и прост. Его можно описать следующей формулой:

$$W_j = (1 - d) + d \sum_{i=1,\, i \neq j}^{N} \frac{W_i}{n_i},$$

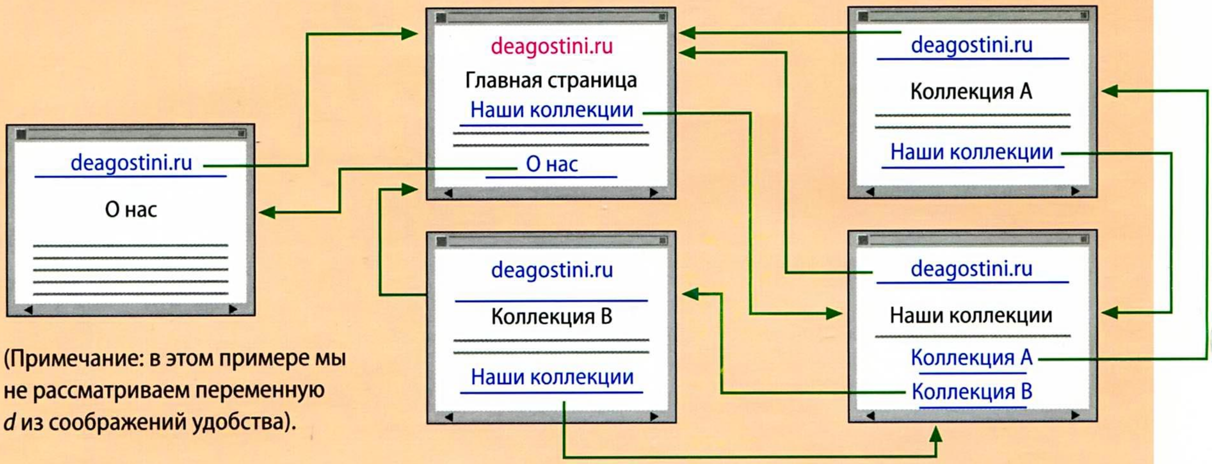
где W_j — значение для страницы j, W_i — для страницы i, которая содержит ссылку на страницу j, d — коэффициент, называемый поправочным (его значение заключено в интервале от 0 до 1; он используется для того, чтобы гарантировать сходимость ряда), n — число ссылок на странице W_i, ведущих на другие страницы, N — общее число страниц, которые содержат ссылку на страницу j.

Релевантность произвольной страницы равна взвешенной сумме релевантностей всех страниц, на которых она упоминается. Весами в этой сумме является общее число ссылок на каждой странице. Так, переменная n указывает вклад произвольной страницы с учетом ссылок, которые она

► *Впечатляющий успех поисковой системы Google, созданной Лоуренсом Пейджем (слева) и Сергеем Брином (справа), основан на использовании алгоритма PageRank, который, в отличие от других поисковых систем, оценивает важность страниц по числу ссылок, после чего упорядочивает результаты поиска согласно их релевантности.*

содержит. Чем больше ссылок приведено на странице, тем меньше будет ее вклад в релевантность целевой страницы. Следовательно, если страница содержит единственную ссылку, она передаст все свое значение релевантности той странице, на которую указывает эта ссылка. Еще одна примечательная особенность PageRank заключается в том, что он равномерно распределяет важность группы страниц, указывающих друг на друга. Кроме того, ни одной странице не может соответствовать значение, равное нулю: минимальное значение релевантности в PageRank равно $(1 - d)$. Рейтинг PageRank рассчитывается до тех пор, пока различные значения W не стабилизируются. Алгоритм PageRank можно интерпретировать как модель поведения интернет-пользователя, который, начав со случайно выбранной страницы, последовательно переходит по ссылкам, пока не находит то, что ему нужно. Вероятность того, что этот пользователь посетит какую-либо страницу, прямо пропорциональна количеству ссылок, которые на нее указывают, и обратно пропорциональна числу ссылок, из которых выбирает пользователь. Именно эти факторы учитывает PageRank при определении релевантности любой страницы. Таким образом, PageRank можно интерпретировать как метод расчета этой вероятности. В такой трактовке переменная d будет обозначать вероятность, с которой пользователь прекратит процесс (к примеру, перейдет на страницу, которая не содержит ссылок) и начнет поиск снова, с другой случайно выбранной страницы.

PageRank на практике



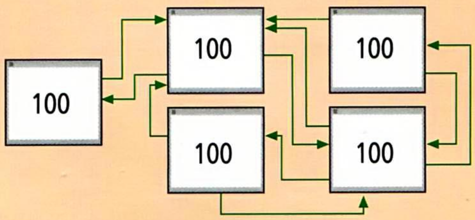
(Примечание: в этом примере мы не рассматриваем переменную d из соображений удобства).

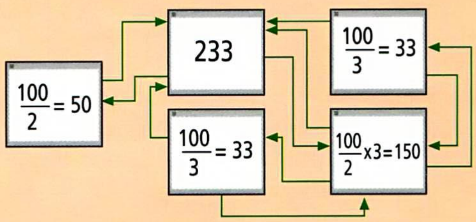
Допустим, что пользователь начинает поиск по запросу deagostini.ru. Google определяет все страницы, на которых содержится строка запроса (в нашем примере предположим, что поисковик выбрал пять страниц сайта этой компании). Далее эти страницы анализируются с помощью алгоритма PageRank. Цель анализа — определить, в каком порядке эти страницы будут показаны пользователю. Изначально каждой странице присваивается одно и то же значение, в нашем случае 100.

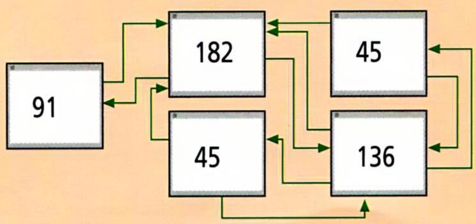
PageRank добавляет к этому значению взвешенную сумму значений для всех страниц, связанных с данной. Весом является число исходящих ссылок на каждой странице. Так, на страницу «О нас» ведет ссылка с главной страницы. Главная страница содержит две внешние ссылки, поэтому ее начальное значение (100) равномерно распределяется между страницами, на которые ведут эти ссылки. Страница «О нас» получает значение 50.

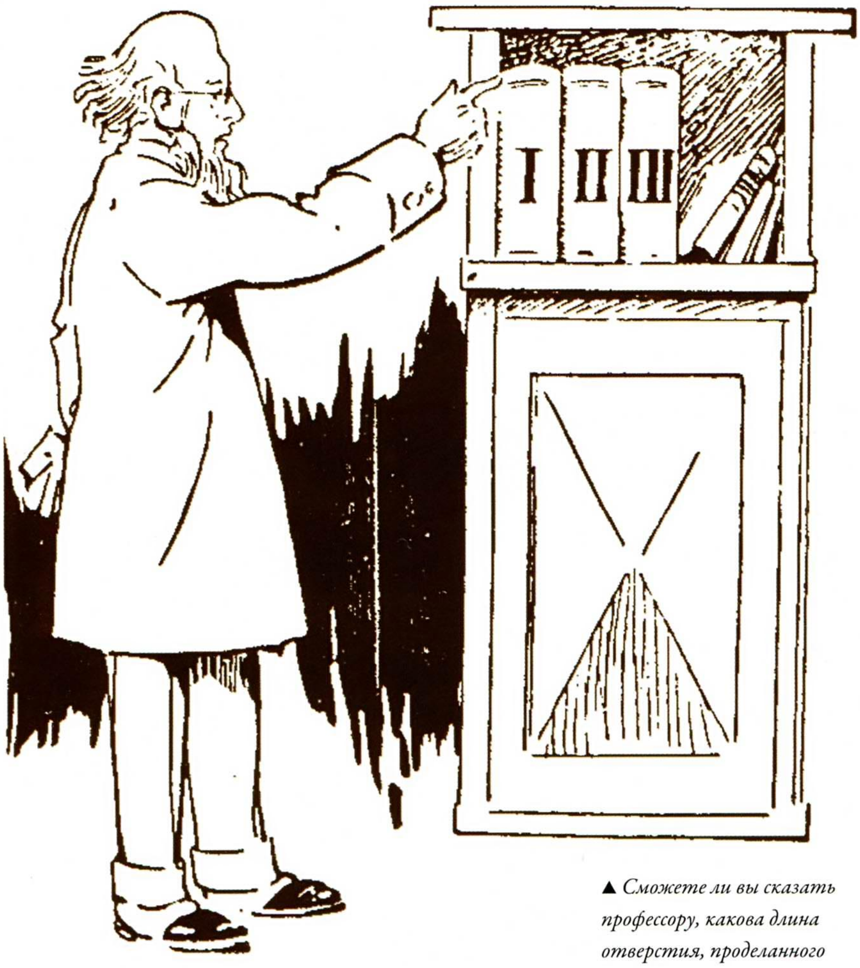
Аналогично, на страницу «Наши коллекции» ведут три ссылки. Каждая из них содержится на странице с двумя исходящими ссылками, что дает общее значение 150 (3 × 50).

После того как этот процесс завершен, он повторяется вновь, пока значения для каждой страницы не сойдутся к некому стабильному значению. Число итераций напрямую зависит от числа страниц в результатах поиска. Наконец, страницы отображаются пользователю в порядке убывания их рейтинга. В нашем примере наибольший рейтинг получит главная страница. Если пользователь решит перейти на самую релевантную страницу результатов поиска по запросу deagostini.ru, Google отобразит главную страницу сайта компании. Если же пользователь выполнит поиск по запросу «Коллекция А» или «Коллекция В», то на первом месте в списке результатов отобразится страница «Наши коллекции».









▲ *Сможете ли вы сказать профессору, какова длина отверстия, проделанного книжным червем в книгах?*

1. Кто был первым?

Андерсон, Биггс и Карпентер вместе живут в домике на берегу. Как-то раз они вышли на лодке в море. Когда они находились на расстоянии в одну милю от берега, в них выстрелили из ружья.

К счастью, нас не интересует, кто стрелял в них и зачем, так как никакой информации об этом не сохранилось. Однако известных данных мне оказалось достаточно, чтобы составить любопытную задачу. По-видимому, Андерсон только услышал звук выстрела, Биггс увидел дым, а Карпентер увидел, как пуля ударилась о воду рядом с лодкой. Вопрос задачи таков: кто из них первым узнал о выстреле?

2. Головоломка с календарем

Если конец света наступит в первый день нового столетия, то какова вероятность, что это будет воскресенье?

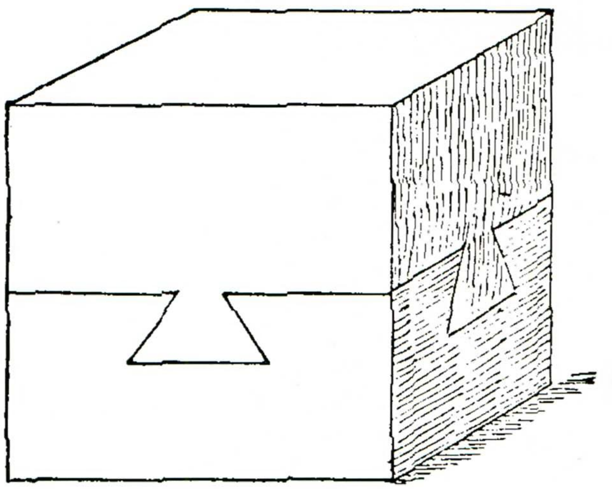
3. Трудолюбивый книжный червь

Наш друг профессор, которого вы можете видеть на рисунке, предложил мне одну из своих задач. Он объяснил, что с момента, когда ему в последний раз довелось снять с полки три тома крайне содержательного трактата, книжный червь проделал в них отверстие с первой страницы до последней. Профессор сказал, что толщина страниц каждого тома равна трем дюймам, толщина каждой обложки — ровно одной восьмой дюйма, и спросил, какую длину имеет отверстие, которое прогрыз книжный червь. Сможете ли вы дать ответ на этот вопрос?

4. Соединение «ласточкин хвост»

Далее представлена любопытная механическая головоломка, о которой мне рассказали несколько лет назад. Кто ее придумал, неизвестно.

Эта головоломка состоит из двух деревянных элементов, соединенных «ласточкиным хвостом». Все четыре вертикальные стороны головоломки выглядят в точности так, как те, что показаны на рисунке. Как соединены элементы



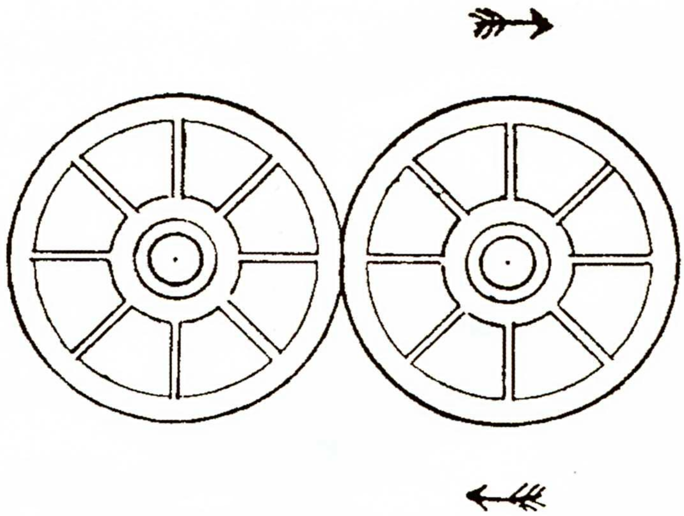
головоломки? Когда эту маленькую головоломку опубликовала одна из лондонских газет, я получил целую гору моделей из дуба, тика, красного дерева, палисандра, вяза и сосны, хотя и не просил об этом. Модели имели самый разный размер. Некоторые из них достигали половины фута, а одна крохотная модель имела площадь в половину квадратного дюйма. По всей видимости, головоломка привлекла немалый интерес читателей.

5. Задача о колесах

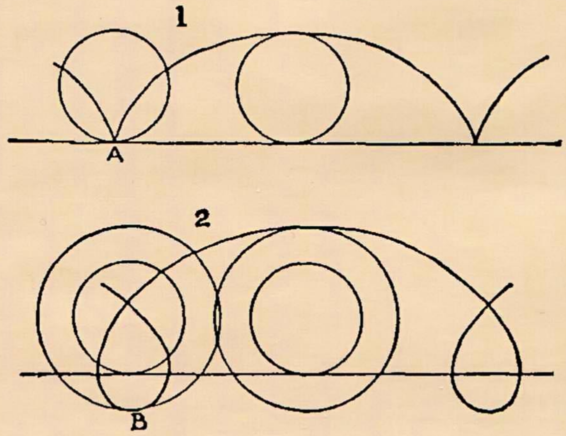
Движение колес обладает некоторыми особенностями, которые, возможно, покажутся удивительными для непосвященных. К примеру, когда поезд идет из Лондона в Кру, некоторые части поезда в любой заданный момент движутся в обратную сторону — из Кру в Лондон. Сможете ли вы указать, какие это части? Кажется абсурдным, что различные части одного и того же поезда могут одновременно двигаться в противоположных направлениях, но это и в самом деле так.

На иллюстрации изображены два колеса. Предполагается, что левое колесо неподвижно, а правое движется в направлении, указанном стрелкой. Сколько раз правое колесо повернется вокруг своей оси, выполнив полный оборот вокруг другого колеса? Не торопитесь с ответом. Если вы поспешите, то наверняка ошибетесь.

Проведите эксперимент с двумя монетами на столе, и вы удивитесь, когда увидите решение задачи собственными глазами.



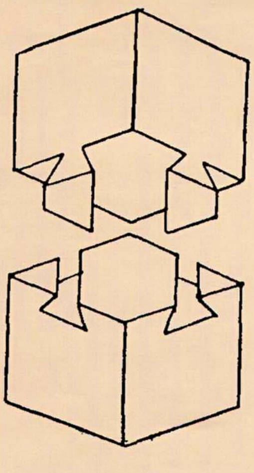
Решения



1. Биггс, который увидел дым, был первым, Карпентер, который увидел, как пуля ударилась о воду, был вторым, Андерсон, который услышал выстрел, — третьим.

2. Первый день нового столетия никогда не выпадает на воскресенье, равно как на среду и четверг.

3. Поспешный читатель решит, что червь прогрыз дыру с первой до последней страницы трехтомника, стоящего на полке; следовательно, отверстие пройдет через три тома и четыре обложки. В нашем случае это означает, что длина отверстия составит 9 с половиной дюймов, что очень далеко от верного ответа. Посмотрите на любые три стоящие рядом тома в вашей библиотеке, и вы увидите, что ближе всего ко второму тому расположены первая страница первого тома и последняя страница третьего тома. Таким образом, чтобы добраться от первой страницы трактата до последней, червь должен прогрызть всего четыре обложки (в сумме 1/2 дюйма) и все страницы второго тома (3 дюйма), то есть в общей сложности 3 1/2 дюйма.



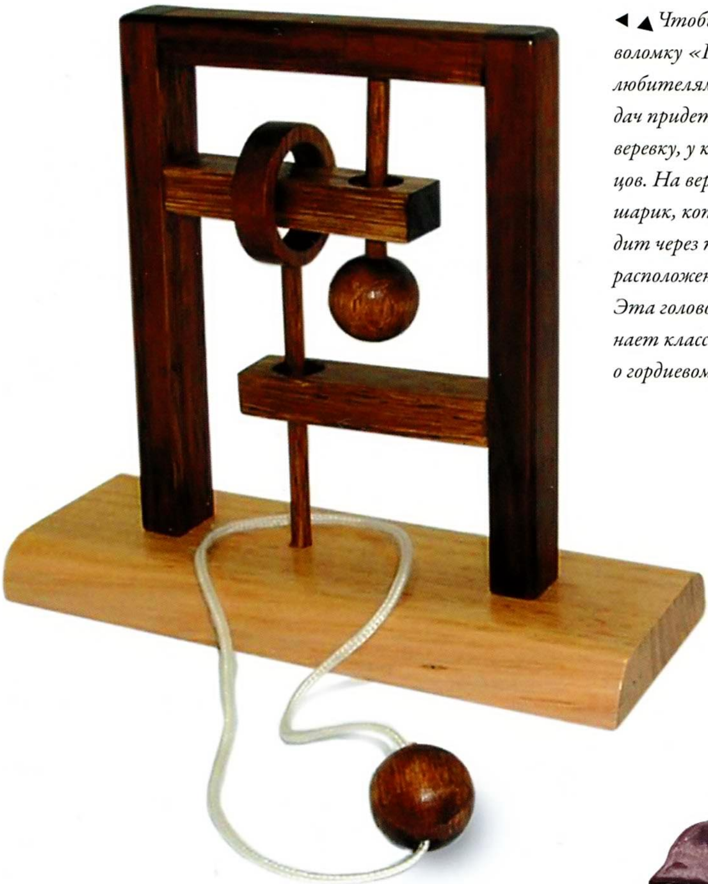
4. Взгляните на рисунок, и загадка тотчас прояснится. Как видите, чтобы разъединить элементы головоломки, достаточно сдвинуть их по диагонали.

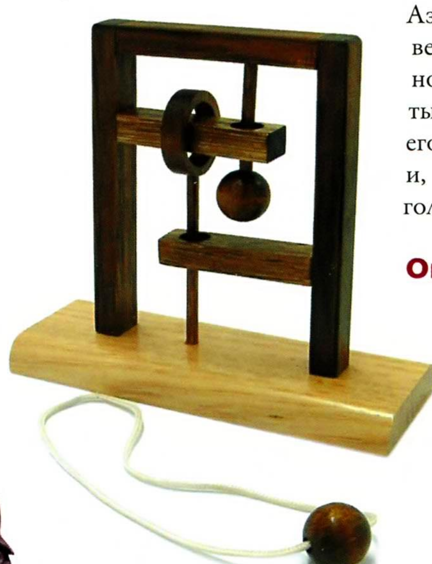
5. Обозначим точку А на окружности колеса, которое движется по поверхности стола, подобно колесу поезда, которое катится по рельсу. Траекторией этой точки будет обычная циклоида, как показано на рис. 1. Однако траекторией точки В на ободе колеса поезда будет уже циклоида с самопересечениями, изображенная на рис. 2. Рассмотрим одну из петель этой циклоиды. «В любой данный момент» некоторые точки петли будут двигаться в направлении, противоположном направлению движения поезда. Так как число таких точек на ободе колеса бесконечно, при движении поезда они будут описывать бесконечное число петель. Таким образом, в любой данный момент определенные точки на ободе колеса будут двигаться в направлении, противоположном направлению движения поезда.

В примере с двумя колесами то колесо, которое вращается вокруг неподвижного колеса, будет совершать одновременно два вращательных движения вокруг своего центра.

Так как размер колес одинаков, очевидно, что если мы рассмотрим наивысшую точку окружности верхнего колеса, то эта точка, пройдя половину траектории, соприкоснется с самой нижней точкой на окружности нижнего колеса. Следовательно, эта точка вновь окажется в верхней части движущегося колеса и завершит полный оборот. Как следствие, верхнее колесо, выполнив полный оборот вокруг другого колеса, повернется вокруг своей оси два раза.

Веревка в лабиринте
Гордиево окно





◄ ▲ *Чтобы решить головоломку «Гордиево окно», любителям головоломок и задач придется «развязать» веревку, у которой нет концов. На веревку нанизан шарик, который не проходит через три отверстия, расположенные в «окне». Эта головоломка напоминает классическую задачу о гордиевом узле.*

Эта новая версия головоломки о гордиевом узле состоит из двух элементов, соединенных между собой, которые нужно разделить, — веревки, на которую нанизан шарик, и «окна» очень интересной формы. Цель головоломки — освободить веревку с нанизанным на нее шариком, продев ее через все отверстия в «окне».

Немного истории

По древнегреческой легенде, древняя столица Фригии после периода войн и завоеваний осталась без царя. Оракул предсказал, что законным царем станет тот, кто приедет в город на колеснице, запряженной буйволами. Бедный крестьянин по имени Гордий с супругой прибыл в город на колеснице, как завещал оракул, и немедленно был провозглашен царем Фригии. В доказательство своей щедрости Гордий пожертвовал колесницу Зевсу и привязал ее невероятно запутанным узлом к столбу в храме. Тогда оракул изрек, что тот, кто сможет развязать этот узел, в будущем покорит всю Азию. В этом узле не было видно концов веревки, и, казалось, развязать его невозможно.

По легенде, спустя сто лет, в 333 году до н. э., Александр Македонский покорил Малую Азию и прибыл со своим войском во фригийскую столицу. Узнав о пророчестве оракула, он несколько раз попытался развязать узел, чтобы провозгласить себя властителем Азии. Не найдя концов веревки, с которых можно было бы начать распутывать узел, он разрубил его пополам своим мечом и, таким образом, решил головоломку.

Описание головоломки

«Гордиево окно» состоит из нескольких столбиков с отверстиями, через которые продеты столбики, оканчивающиеся кольцами. Один из столбиков проходит через веревочную петлю, на которую нанизан шар. Цель головоломки, как мы уже говорили, — освободить веревку.

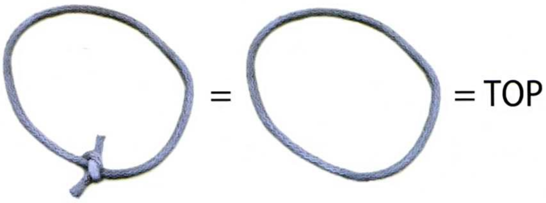
Сложность «Гордиева окна» можно оценить, взглянув на иллюстрацию.

Столбики «переплетаются» с другими столбиками, которые оканчиваются кольцами, и все вместе образуют своеобразный лабиринт, через который нужно провести веревку. На петлю нанизан шарик, который, разумеется, не проходит через отверстия.

◄ *Александр Великий, предприняв несколько неудачных попыток развязать узел, которым Гордий привязал свою колесницу к столбу в храме Зевса, выбрал очень простое, но эффективное решение: вместо того чтобы и дальше пытаться развязать узел, он попросту разрубил его.*

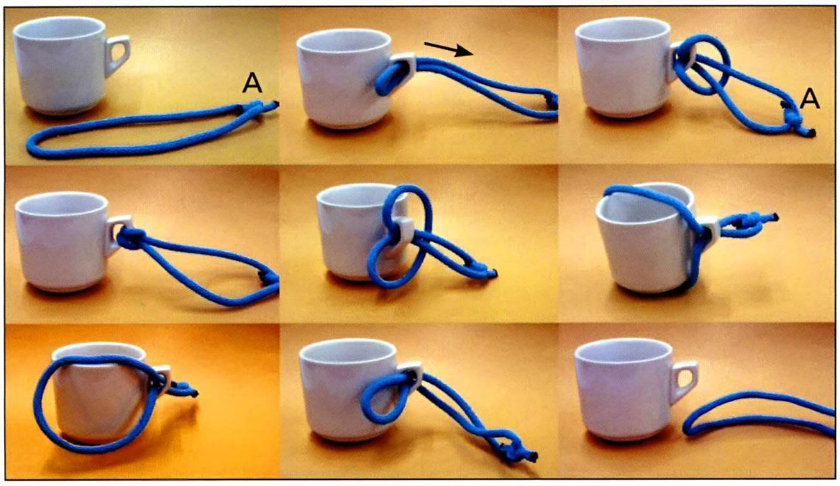
Узел как головоломка

Знакомые нам предметы постоянно используются при создании самых разных головоломок. В этом отношении выделяется особый узел, который используется в качестве петли вместо простой веревки. Здесь мы будем считать петлю веревкой, концы которой связаны. В топологии такая веревка называется тором.



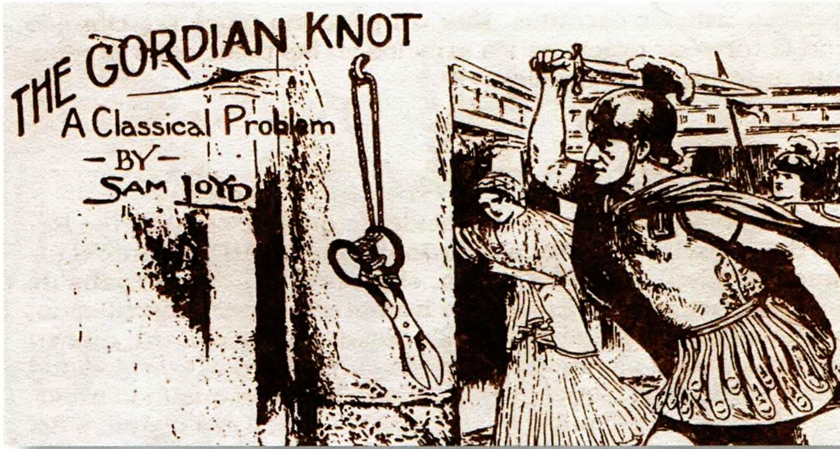
Далее показан классический способ обвязать какой-либо предмет, например ручку чашки.

▼ Ниже шаг за шагом показано решение задачи, в которой петлей обвязывается любой знакомый нам предмет (в этом случае чашка), после чего конец веревки закрепляется так, что освободить чашку кажется невозможным.



Для этого нужно продеть через ушко чашки конец веревки А, а затем провести его через центр петли. Далее нужно вытянуть конец веревки А, и ручка чашки будет прочно обвязана веревкой. Пока что мы имеем всего один узел. Тем не менее достаточно привязать конец А к любой точке, к примеру к стулу, и получится головоломка. Задача этой головоломки будет такова: можно ли развязать узел, если стул не проходит ни через отверстие в ручке, ни через петлю? Эту головоломку можно решить. Для этого достаточно потянуть за тот конец веревки, который расположен над узлом, привязанным к стулу, чтобы получить петлю, через которую можно будет продеть чашку, и та освободится от веревки.

▼ Знаменитейший автор головоломок и задач американец Сэм Лойд изобразил Александра Великого, разрубающего гордиев узел, которым завязаны ножницы, а не знаменитая колесница царя Гордия. Это может показаться удивительным, однако при решении данной задачи используется тот же принцип, что и в остальных случаях, о которых мы рассказали.



Другие разновидности головоломок с гордиевым узлом

Среди множества разновидностей этой занимательной головоломки выделяется та, которую придумал великий мастер головоломок американец Сэм Лойд.

По обычаю, Лойд сопровождал свои головоломки рисунками в своем стиле. На рисунке к головоломке с гордиевым узлом изображены ножницы, обвязанные веревкой, и кажется, что узел невозможно развязать, не разрезав веревку. Головоломка превращается в парадокс: чтобы разрезать веревку, нужны ножницы, но чтобы освободить их, сначала нужно разрезать веревку. В качестве примера Лойд приводит Александра Македонского, который решил эту головоломку радикальным способом, то есть разрубил веревку мечом.

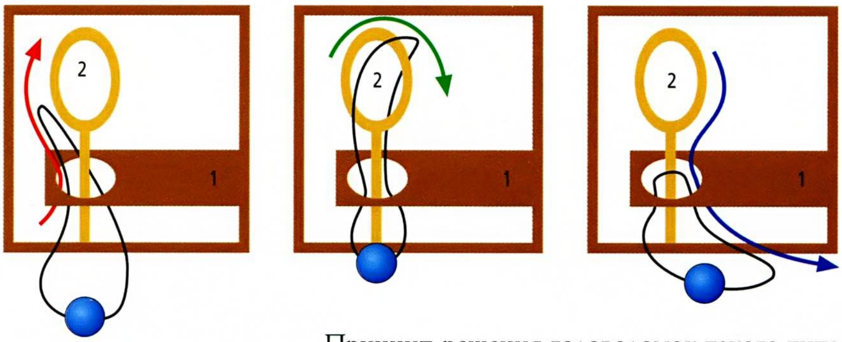
Любителям занимательных задач не следует хвататься за меч — им нужно найти хитроумный способ, позволяющий отвязать ножницы от веревки, на которой они подвешены. Мы предлагаем читателю обвязать ножницы веревкой так, как показано на рисунке Сэма Лойда, и попытаться решить его задачу самостоятельно.

Решение головоломок с гордиевыми узлами

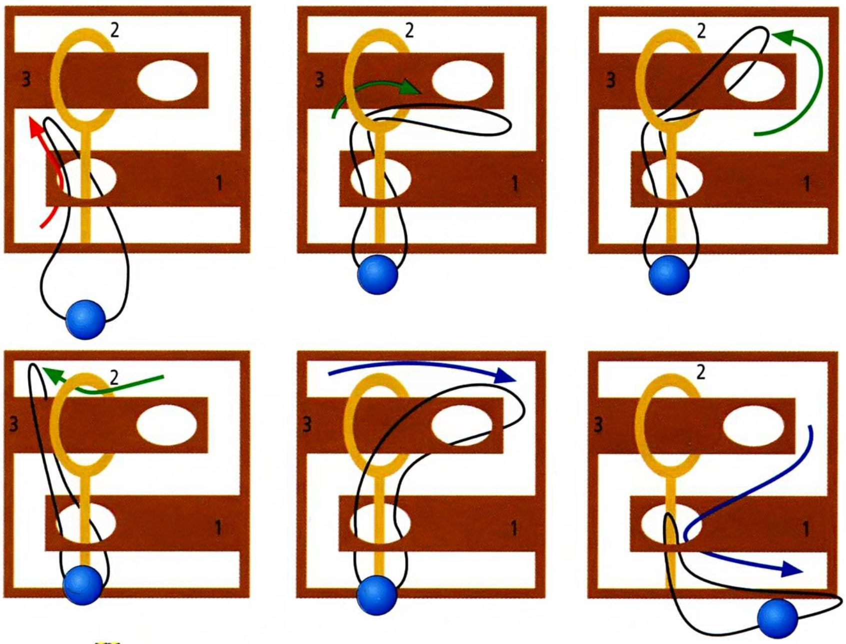
Прежде чем перейти к решению головоломки «Гордиево окно», мы подробно рассмотрим один пример, который поможет понять общий принцип, лежащий в основе решения всех головоломок такого типа.

На иллюстрации представлена упрощенная версия «Гордиева окна» со столбиками 1 и 2.

В этой головоломке петля, на которую нанизан шарик, нанизана на столбик номер 2.

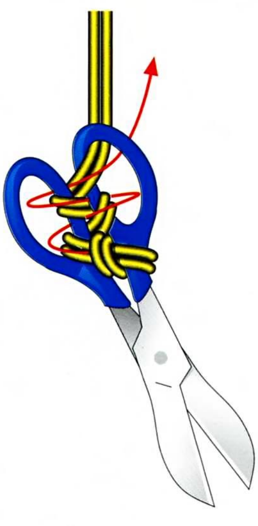


Принцип решения головоломок такого типа очень прост. Чтобы освободить веревку, нужно продеть конец петли через отверстие в столбике номер 1 (направление показано красной стрелкой), затем провести веревку над кольцом номер 2 (как показано зеленой стрелкой) и, наконец, вновь продеть веревку через отверстие в столбике номер 1 (как показано стрелкой синего цвета).



Вернемся к «Гордиеву окну». Добавим к предыдущему варианту головоломки столбик номер 3 и рассмотрим еще один этап решения головоломки.

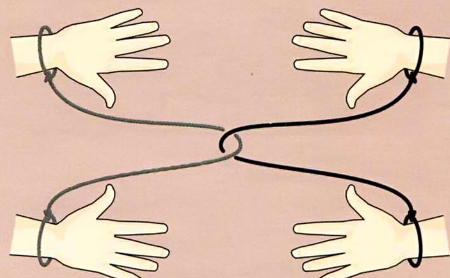
Можно заметить, что теперь зеленая стрелка указывает направление, вдоль которого нужно провести веревку над столбиком номер 3, чтобы освободить петлю. После этого нужно следовать в направлении, указанном синей стрелкой, и головоломка будет решена.



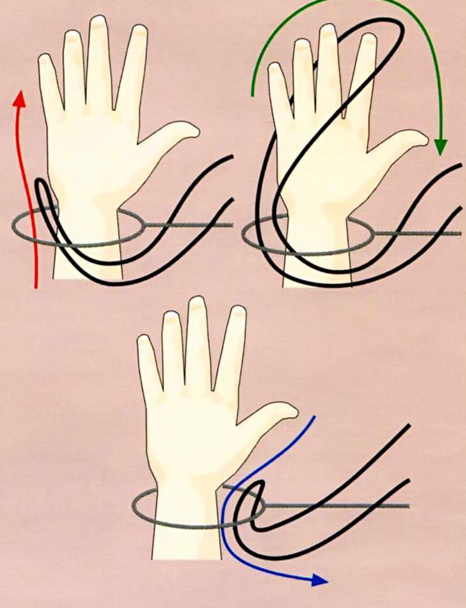
◄ Многие поняли, что решение задачи с ножницами основано на том же принципе, что и решение головоломки с чашкой: нужно вытянуть конец петли вдоль двойной веревки (сначала через левое отверстие, затем через правое, потом вновь через левое и через правое), а затем продеть веревку между ручками ножниц. Головоломка решена, и для этого не пришлось разрезать веревку.

Салонная игра

Тот же принцип, который мы применили для решения предыдущих головоломок, используется в увлекательной головоломке с узлами, рассчитанной на двух человек. На иллюстрации вы можете видеть, что игроки связывают запястья двумя свободно висящими сплетенными веревками. Игроки должны освободиться, не разрезая веревки и не развязывая их на запястьях.



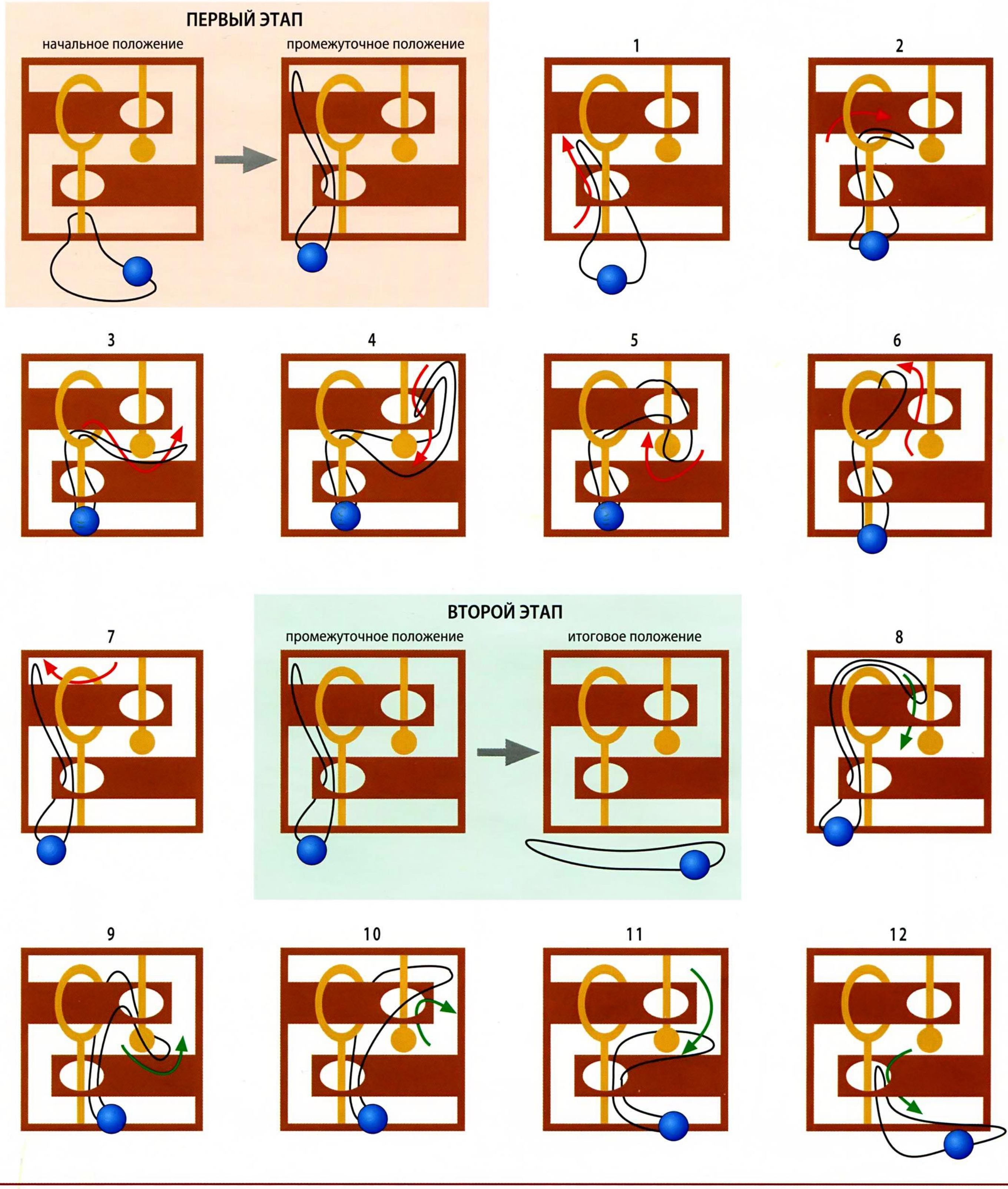
На следующей схеме последовательно показано решение этой игры. Чтобы игроки смогли разделиться, нужно сделать так, чтобы центр одной из петель прошел через отверстие, образованное веревкой, обвязанной вокруг запястья второго игрока, как показано красной стрелкой. Затем нужно продеть руку в петлю, как показано стрелкой зеленого цвета, и, наконец, вновь провести веревку через петлю у запястья, как указывает синяя стрелка, и задача будет решена.



Решение головоломки «Гордиево окно»

При решении «Гордиева окна» нужно выполнить указанные действия и внимательно следить, чтобы веревочная петля всегда имела форму кольца, то есть ни в коем случае не допускать, чтобы она переплеталась «восьмеркой».

Полное решение головоломки состоит из двух этапов. На первом этапе нужно перейти от исходного положения к промежуточному, выполнив действия 1–7. Затем, чтобы освободить веревку, следует выполнить действия 8–12, начиная из промежуточного положения.




18 17 3
11 8 7 19
9 6 5 4 16
14 1 2 12
15 10
13